

Interrogation n°1 – Trigonométrie, nombres complexes (sujet A) **Corrigé**

NOM : Prénom : Note :

- /3 1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la formule de $\cos(a - b)$ et la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- /3 2) Compléter les formules de $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ et de $z\bar{z}$.

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

- /5 3) Résoudre $\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned} \tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{S} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

- /9 4) On pose $x = \frac{\pi}{9}$. Déterminer le nombre $\operatorname{Im}\left(\frac{(1 + e^{2ix})(e^{4ix} - 1)}{\cos(x)\sin(2x)}\right)$.

$$\begin{aligned} \frac{(1 + e^{2ix})(e^{4ix} - 1)}{\cos(x)\sin(2x)} &= \frac{e^{ix}(e^{-ix} + e^{ix})e^{i2x}(e^{2ix} - e^{-i2x})}{\cos(x)\sin(2x)} \\ &= \frac{e^{ix} \times 2\cos(x) \times e^{i2x} \times 2i\sin(2x)}{\cos(x)\sin(2x)} \\ &= 4ie^{i3x} \\ &= 4ie^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 4i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2i - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la partie imaginaire, on obtient $\boxed{2}$.

Interrogation n°1 – Trigonométrie, nombres complexes (sujet B) **Corrigé**

NOM : Prénom : Note :

- /3 1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a+b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. Donner la formule de $\tan(a+b)$ et la valeur de $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

- /3 2) Énoncer les deux inégalités triangulaires.

Soit $u, v \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |u+v| &\leq |u| + |v| \\ ||u| - |v|| &\leq |u-v| \end{aligned}$$

- /5 3) Résoudre $\sin(3x) = 0$.

$$\begin{aligned} \sin(3x) = 0 = \sin(0) &\iff 3x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \pi [2\pi] \\ &\iff 3x \equiv 0 [\pi] \\ &\iff x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

- /9 4) Résoudre $z^3 = i$ en utilisant la forme exponentielle.

• Si on avait $z = 0$, on aurait $0^3 = 0 = i$, ce qui est absurde. On a donc $z \neq 0$.

Comme $z \neq 0$, on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a donc

$$\begin{aligned} z^3 = i &\iff (re^{i\theta})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff r^3 e^{i3\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right\} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}} \right\}$$